# Сандық интегралдау

$$\int_a^b f(x)dx$$

есептеңіз, мұндағы $f(x)$ – берілген функция.

*Кіріспе*

Квадратура деп те аталатын сандық интегралдау сандық дифференциалдаудан гөрі дәлірек үрдіс болып табылады. Квадратура

$$\int_a^b f(x)dx$$

анықталған интегралын

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

қосындысымен жуықтайды, мұндағы түйіндік абсциссалар $x_i$және $A_i$ салмақтары квадратура үшін қолданылатын нақты формулаға тәуелді. Квадратураның барлық формулалары интегралдың астындағы өрнектің көпмүшелік интерполяциясынан қорытылады. Сондықтан, егер $f(x)$ көпмүшелікпен жуықталатын болса, олар жақсы жұмыс істейді.

Сандық интегралдау әдістерін екі топқа бөлуге болады: Ньютон-Котес формулалары және Гаусс квадратурасы. Ньютон-Котес формулалары бірдей аралық абсциссалармен сипатталады, сондай-ақ трапеция және Симпсон формулалары сияқты белгілі әдістерді қамтиды. Олар $f(x)$ тең аралықтармен есептелген болса немесе төмен бағалаумен есептелуі мүмкін болса өте пайдалы.

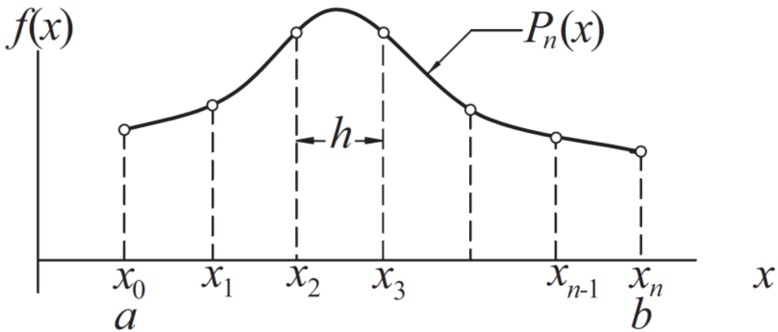
Ньютон-Котес формулалары жергілікті интерполяцияға негізделгендіктен, олар көпмүшеге бөлшектеп сәйкестендіруді ғана талап етеді.

Гаусс квадратурасында ең жақсы мүмкін дәлдікті алу үшін абсциссалардың орналасуы таңдалады. Гаусс квадратурасы берілген дәлдік үшін интегралды астындағы өрнекті аз есептейтіндіктен, ол $f(x)$ есептеуі көп болатын жағдайларда танымал. Гаусс квадратурасының тағы бір артықшылығы оның интегралданатын сингулярлықтарды өңдеу қабілеті болып табылады, бұл бізге келесідей өрнектерді есептеуге мүмкіндік береді.

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

мұндағы $g(x)$ дұрыс анықталған функция.

### Ньютон-Котес формулалары




1-сурет. $f(x)$-тың көпмүшелік жуықтауы.

Анықталған интегралды қарастырайық

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

$(a, b)$ интегралдау аралығын 1-суретте көрсетілгендей $h = (b - a)/n$ ұзындықтағы $n$ тең аралыққа бөлеміз және алынған түйіндердің абсциссаларын $x_0, x_1, \dots, x_n$ деп белгілейміз.. Әрі қарай $f(x)$ мәнін барлық түйіндерді қиып өтетін n дәрежелі көпмүшелікпен жуықтаймыз. Бұл көпмүшенің Лагранж формасы

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

мұндағы

$$l_i(x) = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

түрінде анықталған негізгі функциялар. Демек, (1) теңдеудегі интеграл жуықтауы

$$I = \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \left[ f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \right] = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad (2a)$$

мұндағы

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, i = 0,1, \dots, n \qquad (2b)$$

болып табылады.

(2) теңдеулер Ньютон-Котес формулалары болып табылады. Бұл формулалардың классикалық мысалдары трапеция формуласы $(n = 1)$, Симпсон формуласы $(n = 2)$ және $3/8$

Симпсон формуласы $(n = 3)$ болып табылады. Бұл формулалардың ең маңыздысы трапеция ережесі болып табылады. Оны Ричардсон экстраполяциясымен біріктіріп, Ромберг интегралдауы деп аталатын тиімді алгоритм құруға болады, бұл басқа классикалық ережелерді біршама артық етеді.

**Трапеция формуласы**

Егер $n = 1$ (бір бөлік), 2-суретте көрсетілгендей, бізде

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{(x - b)}{h}$$

болады. Сондықтан,

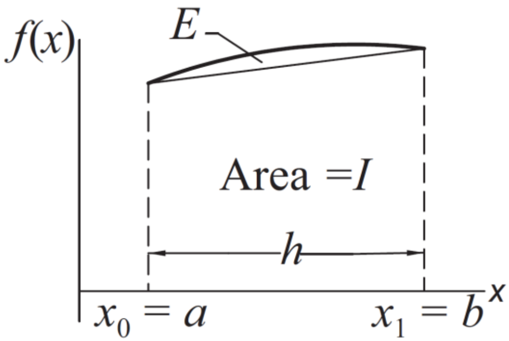
$$A_0 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x - b)dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}$$

Сондай-ақ

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x - a)}{h}$$

сондықтан

$$A_1 = \frac{1}{h}\int_a^b (x - a)dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}$$




2-сурет. Трапеция формуласының кескіні

(2a) теңдеудегі алмастыру трапеция ережесі ретінде белгілі

$$I = [f(a) + f(b)]\frac{h}{2} \qquad (3)$$

береді. Ол 2-суретте трапецияның ауданын көрсетеді.

$$\mathrm{E} = \int_a^b f(x)dx - I$$

трапеция ережесіндегі қателік 2-суретте көрсетілгендей, f(x) және түзу сызықты интерполянт арасындағы аймақтың ауданы болып табылады. Оны интерполяция қателігін интегралдау арқылы алуға болады:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2!}\int_a^b (x - x_0)(x - x_1)f''(\xi)dx = \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (x - a)(x - b)dx = -\frac{1}{12}(b - a)^3 f''(\xi)$$

$$\mathrm{E} = -\frac{h^3}{12}f''(\xi) \qquad (4)$$

**Құрама трапеция формуласы**

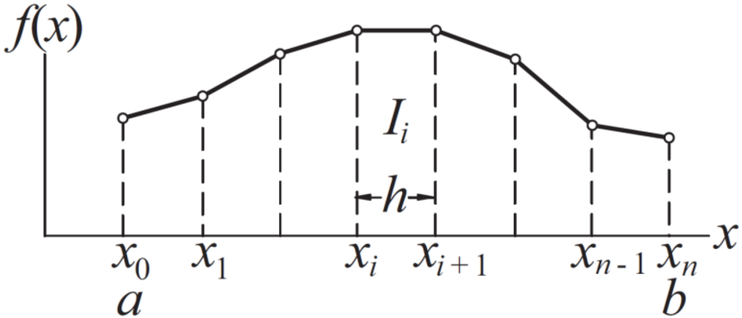
Тәжірибеде трапеция ережесі бөліктеп қолданылады. 3-суретте әрбір ені $h$ болатын $n$ бөлікке бөлінген $(a, b)$ аралығы көрсетілген. Интеграцияланатын $f(x)$ функциясы әрбір бөлікте түзу сызықпен жуықталады. Трапеция формуласынан біз (і-інші) бөліктің шамамен ауданы үшін келесіні аламыз

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]\frac{h}{2}$$

Демек, жалпы аумақтың ауданы $\int_a^b f(x)dx$ білдіреді, бұдан

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\frac{h}{2} \qquad (5)$$

бұл құрама трапеция формуласы.




3-сурет. Құрама трапеция формуласының кескіні.

Бөлік аймағындағы жуықтау қателігі (4) формуламен анықталады.

$$\mathrm{E}_i = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

мұнда $\xi_i - (x_i, x_{i+1})$ аралығында орналасқан. Демек, (5) теңдеудегі жуықтау қателігі

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{E}_i = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \qquad \text{(a)}$$

Бірақ

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = n\bar{f}''$$

мұндағы $\bar{f}''$– екінші ретті туындылардың арифметикалық ортасы. Егер $f''(x)$ үзіліссіз болса, $(a, b)$ ішінде $f''(\xi) = \bar{f}''$ болатын $\xi$ нүктесі болуы керек, бұдан

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = nf''(\xi) = \frac{b-a}{h} f''(\xi)$$

жазуға мүмкіндік береді. Сондықтан, (а) теңдеуі

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \qquad (6)$$

түрге келеді. (6) теңдеуден $E = ch^2$ қорытынды жасау дұрыс болмас еді (c тұрақты). Өйткені $f''(\xi)$ h-қа толық тәуелсіз емес. Қателікті тереңірек талдау келесіні көрсетеді, егер $f(x)$ және оның туындылары $(a, b)$ ақырлы болса, онда

$$E = \mathrm{c}_1 h^2 + \mathrm{c}_2 h^4 + \mathrm{c}_3 h^6 + \cdots \qquad (7)$$

**Рекурсивті трапеция формуласы**

$2^{k-1}$ бөліктер арқылы құрама трапеция формуласымен есептелінетін интеграл $I_k$ болсын. Назар аударыңыз, егер $k$ бірге артса, бөліктер саны екі есе артады.

$$H = b - a$$

белгілеуін пайдаланып (5) теңдеуін $k = 1, 2$ және $3$ үшін келесі нәтижелерді береді.

$k = 1$ (бір бөлік):

$$I_1 = [f(a) + f(b)]\frac{H}{2} \qquad (8)$$

k = 2 (екі бөлік):

$$I_2 = \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{H}{4} = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a + \frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}$$

k = 3 (үш бөлік):

$$I_3 = \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + 2f\left(a + \frac{3H}{4}\right) + f(b)\right]\frac{H}{8} = \frac{1}{2}I_2 + \left[f\left(a + \frac{H}{2}\right) + f\left(a + \frac{3H}{4}\right)\right]\frac{H}{4}$$

Енді біз кез келген $k > 1$ үшін

$$I_k = \frac{1}{2}I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right], \quad k = 2,3,\ldots \qquad (9a)$$

рекурсивті трапеция формуласы болатынын көреміз. Қосындыда бөліктер саны екі еселенген кезде жасалған жаңа түйіндерді ғана қамтитынын ескеріңіз. Сондықтан (8) және (9a) теңдеулерден $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_k$ тізбегін есептеу (6.5) теңдеуден тікелей $I_k$ есептеудегідей алгебраны қамтиды. Рекурсивті трапеция ережесін қолданудың артықшылығы, ол жинақтылықты бақылауға және $I_{k-1}$ мен $I_k$ арасындағы айырмашылық жеткілікті аз болған кезде үрдісті тоқтатуға мүмкіндік береді. (9a) теңдеуін есте сақтаудың оңай жолы

$$I(h) = \frac{1}{2}I(2h) + h\sum f\left(x_{\text{жаңа}}\right) \qquad (9b)$$

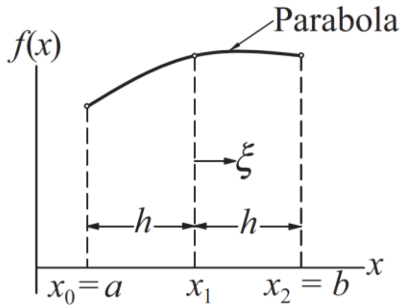
мұндағы $h = H/n$ - әрбір бөліктің ені.

**trapezoid модулі**

trapezoid функциясы (8) және (9)теңдеулерінен $I_{k-1}$ (Iold) пайдаланып берілген $I_k$ (Inew) есептейді. Біз $k = 1, 2, ...$ болатын trapezoid функциясын шақыру арқылы қажетті дәлдікке жеткенше $\int_a^b f(x)dx$ есептей аламыз.

```
## module trapezoid
''' Inew = trapezoid(f,a,b,Iold,k).
Рекурсивті трапеция формуласы:
Iold = x a-дан b-ға дейінгі f(x) интегралы арқылы есептеледі
2ˆ(k-1) бөліктері бар трапеция формуласы.
Inew = 2ˆk бөліктермен есептелген сол интеграл.
'''
def trapezoid(f,a,b,Iold,k):
    if k == 1:Inew = (f(a) + f(b))*(b - a)/2.0
    else:
        n = 2**(k -2 ) # Жаңа нүктелер саны
        h = (b - a)/n # Жаңа нүктелер аралығы
        x = a + h/2.0
        sum = 0.0
        for i in range(n):
            sum = sum + f(x)
            x = x + h
        Inew = (Iold + h*sum)/2.0
    return Inew
```

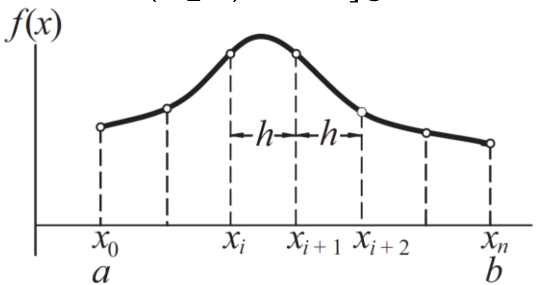
**Симпсон формуласы**




4-сурет. Симпсонның 1/3 формуласының кескіні

Симпсонның 1/3 ережесін $n = 2$ болатын Ньютон-Котес формулаларынан, 4-суретте көрсетілгендей үш көршілес түйін арқылы параболалық интерполянтты өткізу арқылы алуға болады. $\int_a^b f(x)dx$ жуықтауын білдіретін параболаның астындағы аудан

$$I = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{h}{3} \qquad (a)$$




5-сурет. Симпсонның 1/3 құрама формуласының кескіні.

Симпсонның 1/3 құрама формуласын алу үшін $(a, b)$ интегралдау аралығын 5-суретте көрсетілгендей, әрқайсысы ені $h = (b - a)/n$ болатын $n$ бөлікке (n жұп) бөлінеді. (a) теңдеуді екі көрші бөлікке қолданып, біз келесіні

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]\frac{h}{3} \qquad (b)$$

аламыз. (b) теңдеуді қою арқылы

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \sum_{i=0,2,\ldots}^{n} \left[\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx\right]$$

мынаны аламыз

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx I = [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\frac{h}{3} \qquad (10)$$

(10) теңдіктегі Симпсонның 1/3 құрама формуласы сандық интегралдаудың ең танымал әдісі. Дегенмен, оның беделі аздап лайықсыз, өйткені трапеция ережесі неғұрлым сенімді және Ромберг интегралдауы тиімдірек.

Симпсонның құрама формуласындағы қателіктен

$$E = \frac{(b - a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad (11)$$

біз (10) теңдеудегі $f(x)$ үш немесе одан төмен дәрежелі көпмүше болса дәл деп қорытамыз.

Симпсонның 1/3 формуласы n бөліктер санының жұп болуын талап етеді. Егер бұл шарт орындалмаса, біз бірінші (немесе соңғы) үш бөлікті Симпсонның 3/8 формуласымен біріктіре аламыз,

$$I = [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]\frac{3h}{8} \qquad (12)$$

және қалған бөліктер үшін Симпсонның 1/3 формуласын пайдаланыңыз. (12) теңдеудегі қателік (10) теңдеудегідей ретті.

МЫСАЛ 1
Ньютон-Котес формулаларынан Симпсонның 1/3 формуласын шығарыңыз.
Шешуі. 4-суретке сілтеме жасай отырып, Симпсонның 1/3 формуласы

$$x_0 = a, \qquad x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x_2 = b$$

орналасқан үш түйінді пайдаланады. Түйіндердің аралығы $h = (b-a)/2$. Лагранждың үш нүктелі интерполяциясының негізгі функциялары

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Бұл функцияларды интегралдау оңайырақ, егер $\xi$ айнымалысын $x_1$ нүктесінде бастасақ. Сонда түйіндердің координаталары $\xi_0 = -h, \xi_1 = 0, \xi_2 = h$ болады және (2b) теңдеуде

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx = \int_{-h}^{h} l_i(\xi)d\xi$$

болады. Демек,

$$A_0 = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi-0)(\xi-h)}{(-h-0)(-h-h)}d\xi = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}(\xi^2 - h\xi)d\xi = \frac{h}{3}$$

$$A_1 = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi+h)(\xi-h)}{(0+h)(0-h)} d\xi = -\frac{1}{h^2} \int_{-h}^{h} (\xi^2 - h^2) d\xi = \frac{4h}{3}$$

$$A_2 = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi+h)(\xi-0)}{(h+h)(h-0)} d\xi = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^{h} (\xi^2 + h\xi) d\xi = \frac{h}{3}$$

(2a) теңдеу Симпсонның 1/3 формуласын құрайтын

$$I = \sum_{i=0}^{2} A_i f(x_i) = \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \frac{h}{3}$$

3 мәнді береді.

**МЫСАЛ 2**

(1) 8 бөлікті және (2) 16 бөлікті пайдаланып, құрама трапеция формуласымен

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\, dx$$

интегралының шекараларын бағалаңыз.

**(1) бөлімнің шешуі.** Сегіз бөлікте $h = \pi/8$ аралықта орналасқан тоғыз түйін бар. Түйіндердің абсциссалары $x_i = i\pi/8,\ i = 0, 1, \ldots, 8$. (5) теңдеуден біз

$$I = \left[ \sin 0 + 2 \sum_{i=1}^{7} \sin \frac{i\pi}{8} + \sin \pi \right] \frac{\pi}{16} = 1.97423$$

аламыз. Қателік (6)теңдеу арқылы берілген:

$$E=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)=-\frac{(\pi-0)(\pi/8)^2}{12}(-\sin\xi)=\frac{\pi^3}{768}\sin\xi$$

мұндағы $0<\xi<\pi$. Біз $\xi$ мәнін білмегендіктен, біз Е-ні бағалай алмаймыз, бірақ оның шекарасын анықтай аламыз:

$$E_{min}=\frac{\pi^3}{768}\sin 0=0,\qquad E_{max}=\frac{\pi^3}{768}\sin\frac{\pi}{2}=0.04037$$

Демек,

$$I+E_{min}<\int_0^\pi \sin(x)\,dx<I+E_{max},$$

немесе

$$1.97423<\int_0^\pi \sin(x)\,dx<2.01460.$$

Интегралдың нақты мәні 2-ге тең.

**(2) бөлімнің шешуі.** Бөліктердің екі еселенуі арқылы жасалған жаңа түйіндер ескі бөліктердің ортаңғы нүктелерінде орналасқан. Олардың абсциссалары

$$x_j=\pi/16+j\cdot\pi/8=(1+2j)\cdot\pi/16\,,j=0,1,2,\dots,7$$

(9b) теңдеудегі рекурсивті трапеция формуласын қолданып,

$$I\;=\frac{1.97423}{2}+\frac{\pi}{16}\sum_{j=0}^{7}\sin\frac{(1+2j)\pi}{16}=1.99358$$

аламыз және қателік шегі ($h$ екіге азайған кезде $E$ төртке бөлінетінін ескеріңіз)

$$E_{min}=0,\qquad E_{max}=\frac{0.04037}{4}=0.01009$$

болады. Демек

$$1.99358 < \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx < 2.00367.$$

**МЫСАЛ 3**

Келесі деректерден

| $x$ | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.5000 | 2.0000 | 2.0000 | 1.6364 | 1.2500 | 0.9565 |

$$\int_0^{2.5} f(x)\,dx$$

интеграл мәнін бағалаңыз.

**Шешуі:** Біз Симпсон формулаларын қолданамыз, өйткені олар трапеция формуласына қарағанда дәлірек. Бөліктер саны тақ болғандықтан, біз алғашқы үш бөлікке Симпсонның 3/8 формуласы бойынша интегралды есептейміз және соңғы екі панель үшін 1/3 формуласы қолданамыз:

$$I = [f(0) + 3f(0.5) + 3f(1.0) + f(1.5)]\frac{3\cdot 0.5}{8} + [f(1.5) + 4f(2.0) + f(2.5)]\frac{0.5}{3} = 2.8381 + 1.2655$$
$$= 4.1036$$

**МЫСАЛ 4**

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x\,dx$$

мәнін алты ондық таңбаға дейін бағалау үшін рекурсивті трапеция ережесін пайдаланыңыз. Бұл нәтижеге жету үшін қанша бөлік қажет?

**Шешуі:**

```
## example4
import math
from trapezoid import *
def f(x): return math.sqrt(x)*math.cos(x)

Iold = 0.0
for k in range(1,21):
    Inew = trapezoid(f,0.0,math.pi,Iold,k)
    if (k > 1) and (abs(Inew - Iold)) < 1.0e-6: break
    Iold = Inew
print("Integral =",Inew)
print("nбөлік =",2**(k-1))
```

Бағдарламаның нәтижесі

```
Integral = -0.8948316648532865
nбөлік = 32768
```

Демек, $\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x\, dx = -0.894\,832$ интегралы 32 768 бөлікті қажет етеді. Баяу жинақтылық $f(x)$ барлық туындыларының $x = 0$ кезінде сингулярлы болуының нәтижесі болып табылады. Демек, қателік (7) теңдеуде көрсетілгендей әрекет етпейді: $E = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \cdots$, бірақ болжау мүмкін емес. Мұндай сипаттағы қиындықтарды жиі айнымалыны өзгерту арқылы жоюға болады. Бұл жағдайда біз келесіні енгіземіз $t = \sqrt{x}$ бұдан $dt = dx/2\sqrt{x}$ немесе $dx = 2tdt$. Олай болса,

$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{x}\cos x\,dx = \int_{0}^{\sqrt{\pi}} 2t^2\cos t^2\,dt$$

оң жақтағы интегралды бағалау 4096 бөлікпен аяқталады.

**Ромберг интегралдауы**

Ромберг интегралдауы трапеция формуласын Ричардсон экстраполяциясымен біріктіреді (5.1-сабақты қараңыз). Алдымен

$$R_{i,1} = I_i$$

белгілеуін енгізейік, мұнда бұрынғыдай $I_i$ мәні $2^{i-1}$ бөліктер арқылы рекурсивті трапеция формуласымен есептелген $\int_a^b f(x)dx$ жуық мәнін білдіреді. Еске салайық, бұл жуықтаудағы қателігі $E = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \cdots$, мұндағы

$$h = \frac{b-a}{2^{i-1}}$$

бөліктің ені.

Ромберг интегралдауы трапеция формуласынан $R_{1,1} = I_1$ (бір бөлік) және $R_{2,1} = I_2$ (екі бөлік) есептеуден басталады. Келесі $c_1h^2$ жетекші қателік мүшесі Ричардсон экстраполяциясымен жойылады. (5.1.9) теңдеудегі $p = 2$ (басшы қателік мүшедегі көрсеткіш) пайдаланып, нәтижені $R_{2,2}$ деп белгілей отырып,

$$R_{2,2} = \frac{2^2R_{2,1} - R_{1,1}}{2^2 - 1} = \frac{4}{3}R_{2,1} - \frac{1}{3}R_{1,1} \qquad \text{(a)}$$

аламыз. Нәтижелерді келесі массив түрінде сақтау ыңғайлы

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ R_{2,1} & R_{2,2} \end{bmatrix}$$

Содан кейін келесі қадам $R_{3,1} = I_3$ (төрт бөлік) есептеу және Ричардсон экстраполяциясын $R_{2,1}$ және $R_{3,1}$ арқылы қайталау, нәтижені $R_{3,2}$ ретінде сақтау:

$$R_{3,2} = \frac{4}{3}R_{3,1} - \frac{1}{3}R_{2,1} \qquad (b)$$

Осы уақытқа дейін есептелген R массивінің элементтері

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ R_{2,1} & R_{2,2} \\ R_{3,1} & R_{3,2} \end{bmatrix}$$

Екінші бағанның екі элементінде де $c_2h^4$ қателігі бар, оны Ричардсон экстраполяциясымен де жоюға болады. (5.1.9) теңдеуінде p=4 пайдаланып, біз

$$R_{3,3} = \frac{2^4R_{3,2} - R_{2,2}}{2^4 - 1} = \frac{16}{15}R_{3,2} - \frac{1}{15}R_{2,2} \qquad (c)$$

аламыз. Бұл нәтиже $O(h^6)$ қателігіне ие. Енді массив келесіге дейін кеңейеді

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix}$$

Есептердің тағы бір айналымынан кейін біз аламыз

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix}$$

мұндағы $R_{4,4}$ қатесі $O(h^8)$. Интегралдың ең дәл бағалауы әрқашан матрица диагональның соңғы мүшесі екенін байқауға болады. Бұл үрдіс екі тізбектес диагональды мүшелер арасындағы айырмашылық жеткілікті аз болғанша жалғасады. Бұл сұлбада қолданылатын жалпы экстраполяция формуласы

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \qquad i > 1, \qquad j = 2,3,\dots,i \qquad (13a)$$

(13а) теңдеудің суреттік көрінісі

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{R_{i-1,j-1}} & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \searrow & \\ \boxed{R_{i,j-1}} & \rightarrow & \beta & \rightarrow & \boxed{R_{i,j}} \end{array} \qquad (13b)$$

мұндағы α және β көбейткіштері j-ге келесі түрде тәуелді:

| j | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| α | -1/3 | -1/15 | -1/63 | -1/255 | -1/1023 |
| β | 4/3 | 16/15 | 64/63 | 256/255 | 1024/1023 |

Үшбұрышты массив қолмен есептеуге ыңғайлы, бірақ Ромберг алгоритмін компьютерде іске асыру бір өлшемді $R'$ массивінде жүзеге асырылуы мүмкін. Бірінші экстраполяциядан кейін, (а) теңдікті қараңыз, $R_{1,1}$ енді ешқашан пайдаланылмайды, сондықтан оны $R_{2,2}$-ге ауыстыруға болады. Нәтижесінде бізде келесі массивті аламыз

$$\begin{bmatrix} R'_1 = R_{2,2} \\ R'_2 = R_{2,1} \end{bmatrix}$$

Екінші экстраполяция кезеңінде, (b) және (c) теңдеулермен анықталған, $R_{3,2}$ $R_{2,1}$-дің орнына жазады, ал $R_{3,3}$ $R_{2,2}$-ні ауыстырады, осылайша массив құрамы

$$\begin{bmatrix} R'_1 = R_{3,3} \\ R'_2 = R_{3,2} \\ R'_3 = R_{3,1} \end{bmatrix}$$

және т.б. Осылайша, $R'_1$ әрқашан ең жақсы ағымдағы нәтижені қамтиды. k-ші айналым үшін экстраполяция формуласы

$$R'_j = \frac{4^{k-j} R'_{j+1} - R'_j}{4^{k-j} - 1} \qquad j = k-1, k-2, \ldots, 1 \qquad (14)$$

romberg модулі

Ромберг интегралдау алгоритмі romberg функциясында жүзеге асырылады. Ол интегралды және пайдаланылған бөліктер санын қайтарады. Ричардсон экстраполяциясы richardson функциясы арқылы жүзеге асырылады

```
## module romberg
''' I,nPanels = romberg(f,a,b,tol=1.0e-6).
f(x)-тың x = a-дан b-ге дейінгі Ромберг интегралуы.
Интегралды және пайдаланылған бөліктер санын қайтарады
'''
import numpy as np
from trapezoid import *

def romberg(f,a,b,tol=1.0e-6):
    def richardson(r,k):
        for j in range(k-1,0,-1):
            const = 4.0**(k-j)
            r[j] = (const*r[j+1] - r[j])/(const - 1.0)
```

```
        return r
    r = np.zeros(21)
    r[1] = trapezoid(f,a,b,0.0,1)
    r_old = r[1]
    for k in range(2,21):
        r[k] = trapezoid(f,a,b,r[k-1],k)
        r = richardson(r,k)
        if abs(r[1]-r_old) < tol*max(abs(r[1]),1.0):
            return r[1],2**(k-1)
        r_old = r[1]
    print("Ромберг квадратурасы жинақталмайды")
```

**МЫСАЛ 5**

Ромберг интегралдауындағы $R_{k,2}$ шамасы $2^{k-1}$ бөлікпен (10) теңдеудегі Симпсонның 1/3 құрама формуласымен бірдей екенін көрсетіңіз.

Шешуі. Еске салайық, Ромберг интегралында $R_{k,1} = I_k$ шамасы $\mathrm{n} = 2^{k-1}$ бөліктері бар құрама трапеция формуласы бойынша алынған жуық интегралды белгілейді. Түйіндердің абсциссаларын $x_0, x_1, \ldots, x_n$ арқылы белгілеп, біз (5)теңдеудегі құрама трапеция формуласынан келесіні аламыз

$$R_{k,1} = I_k = \left[ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \frac{h}{2}$$

Бөліктер санын екі есеге азайтқанда (бөлік ені 2h), тек жұп санды абсциссалар ғана құрама трапеция формуласына енеді

$$R_{k-1,1} = I_{k-1} = \left[ f(x_0) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] h$$

Ричардсон экстраполяциясын қолданып,

$$R_{k,2}=\frac{4}{3}R_{k,1}-\frac{1}{3}R_{k-1,1}=\left[\frac{1}{3}f(x_0)+\frac{4}{3}\sum_{i=1,3,\dots}^{n-1}f(x_i)+\frac{2}{3}\sum_{i=2,4,\dots}^{n-2}f(x_i)+\frac{1}{3}f(x_n)\right]h$$

(10) теңдеумен сәйкес келеді.

**МЫСАЛ 6**

$\int_0^{\pi} f(x)dx$ мәнін бағалау үшін Ромберг интегралдауын пайдаланыңыз, мұндағы $f(x)=\sin(x)$. Төрт ондық таңбамен жұмыс жасау керек.

Шешуі. (9б) Теңдеудегі рекурсивті трапеция формуласынан

$$R_{1,1}=I(\pi)=\frac{\pi}{2}[I(0)+I(\pi)]=0$$

$$R_{2,1}=I(\pi/2)=\frac{1}{2}I(\pi)+\frac{\pi}{2}f(\pi/2)=1.5708$$

$$R_{3,1}=I(\pi/4)=\frac{1}{2}I(\pi/2)+\frac{\pi}{4}[f(\pi/4)+f(3\pi/4)]=1.8961$$

$$R_{4,1}=I(\pi/8)=\frac{1}{2}I(\pi/4)+\frac{\pi}{8}[f(\pi/8)+f(3\pi/8)+f(5\pi/8)+f(7\pi/8)]$$
$$=1.9742$$

аламыз. (13) теңдеудегі экстраполяция формулаларын қолданып, біз енді келесі кестені құра аламыз:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1.5708 & 2.0944 & & \\ 1.8961 & 2.0046 & 1.9986 & \\ 1.9742 & 2.0003 & 2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Процедура жинақталған сияқты. Демек, $\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = R_{4,4} = 2.0000$, бұл, әрине, дұрыс нәтиже.

**МЫСАЛ 7**

$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x^2 \cos x^2\, dx$ мәнін бағалау үшін Ромберг интегралдауын пайдаланыңыз және нәтижелерді 4-мысалмен салыстырыңыз.

Шешуі:

```
## example7
import math
from romberg import *

def f(x): return 2.0*(x**2)*math.cos(x**2)

I,n = romberg(f,0,math.sqrt(math.pi))
print("Integral =",I)
print("numEvals =",n)
```

Бағдарлама нәтижесі:

Integral = -0.894831469504

nPanels = 64

Ромберг интегралдауы трапеция формуласына қарағанда анағұрлым тиімді екені анық 4-мысалдағы трапеция формуласы үшін 4096 бөлікпен салыстырғанда 64 бөлік ғана қажет болды.